Тема 10. Устойчивость линейных непрерывных систем. Частотные критерии устойчивости

Критерий устойчивости Найквиста

Преимуществом критерия Найквиста является то, что он дает количественные оценки устойчивости и позволяет связать исследование устойчивости с последующим анализом качества и выбором оптимальных настроечных параметров регуляторов. Формулируется критерий Найквиста следующим образом.

САР, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой в замкнутом состоянии, если годограф АФХ разомкнутой системы при изменении частоты от нуля до бесконечности не охватывает на комплексной плоскости точку с координатами (-1, j0). Устойчивой системе соответствует годограф $W_1(j\omega)$ на рисунке 10.1. Если АФХ разомкнутой системы охватывает точку (–1, j0), то замкнутая система будет неустойчивой. Неустойчивой системе соответствует годограф $W_2(j\omega)$ на рисунке 10.1. Если годограф АФХ разомкнутой системы проходит через точку (-1, j0), то система находится на границе устойчивости.

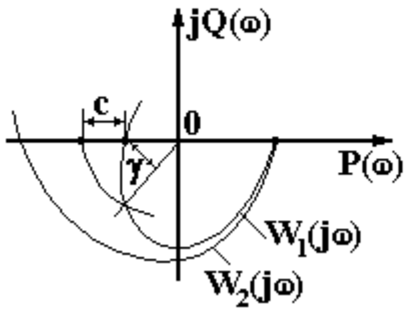

Рисунок 10.1

Для устойчивой системы по расположению годографа АФХ можно судить о так называемом запасе устойчивости. Чем дальше годограф АФХ разомкнутой системы проходит от точки (-1, j0), тем больше этот запас. Характеризуется он двумя численными величинами: запасом устойчивости по модулю С и запасом устойчивости по фазе γ (рисунок 10.1).

Запас устойчивости по модулю определяется как расстояние от точки (–1, j0) до точки пересечения годографа АФХ разомкнутой системы с отрицательной вещественной полуосью. Величина С находится в пределах от 0 до 1. Запас устойчивости по модулю показывает в каких пределах можно увеличивать модуль АФХ разомкнутой системы, чтобы замкнутая система оставалась устойчивой.

Запас устойчивости по фазе – это угол между отрицательной вещественной полуосью и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения годографа АФХ разомкнутой системы с окружностью единичного радиуса. Запас устойчивости по фазе показывает в каких пределах возможно увеличение запаздывания по фазе в разомкнутой системе, чтобы замкнутая система оставалась устойчивой.

Анализ устойчивости по логарифмическим частотным характеристикам разомкнутой системы

Используя критерий Найквиста можно оценить устойчивость системы по ее логарифмическим частотным характеристикам. В соответствии с критерием Найквиста система будет находиться на границе устойчивости, если при значении ФЧХ системы $\varphi(\omega) = -\pi$ модуль АЧХ системы $A(\omega)=1$. Поскольку lg1=0, то условию нахождения системы на границе устойчивости будут соответствовать значения ЛАЧХ разомкнутой системы $L(\omega)=0$ при $\varphi(\omega)=-\pi$. Этот случай изображен на рисунке 10.2 а.

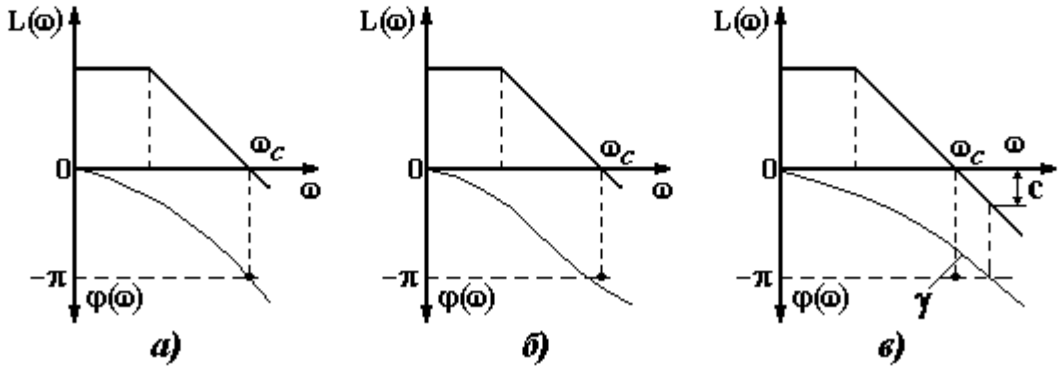

Рисунок 10.2

Если характеристика $\varphi(\omega)$ принимает значение $-\pi$ при положительном значении характеристики $L(\omega)$, то система будет неустойчивой (рисунок 10.2 б). Если характеристика $\varphi(\omega)$ принимает значение $-\pi$ при отрицательном значении характеристики $L(\omega)$, то система будет устойчивой (рисунок 10.2 в).

Тогда критерий Найквиста применительно к логарифмическим частотным характеристикам можно сформулировать следующим образом.

Замкнутая система будет устойчивой, если при достижении ЛФЧХ устойчивой разомкнутой системы значения $-\pi$, логарифмическая амплитудно-частотная характеристика системы отрицательная. При этом запас устойчивости по амплитуде равен С, дБ., а по фазе γ, град., как это показано на рисунке 10.2 в. В заключение отметим, что изложенная формулировка критерия Найквиста справедлива только для так называемых систем с АФХ первого рода, у которых годограф АФХ разомкнутой системы пересекает отрицательную вещественную полуось комплексной плоскости только один раз.

Частотные критерии обносятся к графоаналитическим и позволяют сделать вывод об устойчивости систем по виду их частных характеристик. К таким критериям относятся: критерий Михайлова и критерий Найквиста.

Критерий Михайлова. Основан на анализе характеристического уравнения, где P заменено на $j\omega$

$$H(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_1 p + a_0 \quad ,$$

$$H(j\omega) = a_n(j\omega) + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots j a_1 \omega = p(\omega) + ja(\omega), \tag{10.1}$$

где $$p(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \quad , \tag{10.2}$$

$$Q(\omega) = a_1 - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots . \tag{10.3}$$

$H(j\omega)$ называют вектором Михайлова.

Если изменять частоту от нуля до бесконечности, то вектор $H(j\omega)$ будет изменяться по величине и направлению, описывая своим концом на комплексной плоскости кривую, которая называются годографом Михайлова.

Формулировка критерия: САУ устойчива, если годограф Михайлова при $\omega = 0$ начинается на положительной вещественной полуоси и с увеличением частоты от нуля до плюс бесконечности проходит в положительном направлении против часовой стрелки последовательно «n» квадрантов, нигде не обращаясь в нуль (n – порядок дифференциального или характеристического уравнения). Годографы Михаилова для устойчивых систем представлены на рисунке 10.1.

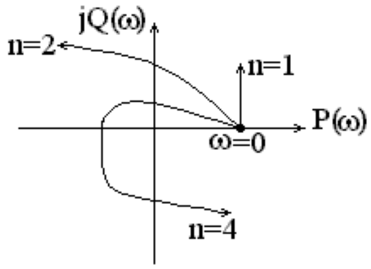

Рисунок 10.1

Нарушение любого пункта правила свидетельствует о неустойчивости системы. Если годограф проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости.

Порядок оценки устойчивости по критерию Михайлова:

а) исходя из заданного дифференциального уравнения или передаточной функции, записываем характеристическое уравнение и в нем заменяем p на $j\omega$;

б) в полученном характеристическом полиноме по формулам (10.2) и (10.3) выделяем $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ – получаем их выражения, как функции от ω;

в) задавая рая частот $\omega=0$ …, строим годограф Михайлова и по его виду делаем вывод об устойчивости.

Критерий Найквиста. Критерий применяется для оценки устойчивости САР, его преимуществом является то, что он дает количественные оценки устойчивости такие как запас устойчивости по модулю и по фазе, а так же позволяет связать исследования устойчивости с последующим анализом качества и выбором оптимальных настроечных параметров регулятора. Критерий позволяет оценить устойчивость замкнутой системы по анализу проведения АФХ разомкнутой системы. При этом необходимо располагать сведениями об устойчивости разомкнутой системы.

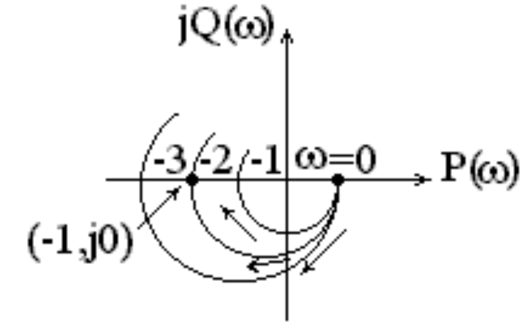

Рисунок 10.2

Формулировка критерия для устойчивой разомкнутой системы: САР, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой и в замкнутом состоянии, если годограф АФХ разомкнутой системы при изменении частоты от нуля до бесконечности не охватывает на комплексной плоскости критическую точку с координатами (-1;j0). Если АФХ проходит через критическую точку, замкнутая САР находится на границе устойчивости, если охватывает эту точку – замкнутая САР неустойчивая. Примеры годографов для всех трех случаев приведены на рисунке 10.2: 1 -замкнутая САР устойчивая; 2 - на границе устойчивости; 3 - неустойчивая.

Формулировка критерия для неустойчивой разомкнутой системы, имеющей «r» правых корней: замкнутая САР будет устойчивой, если АФХ разомкнутой системы при своем движении с изменением ω от 0 до ∞ охватывает критическую точку *(-1;j0)* в положительном направлении (сверху – вниз) r/2 раз (рисунок 10.3).

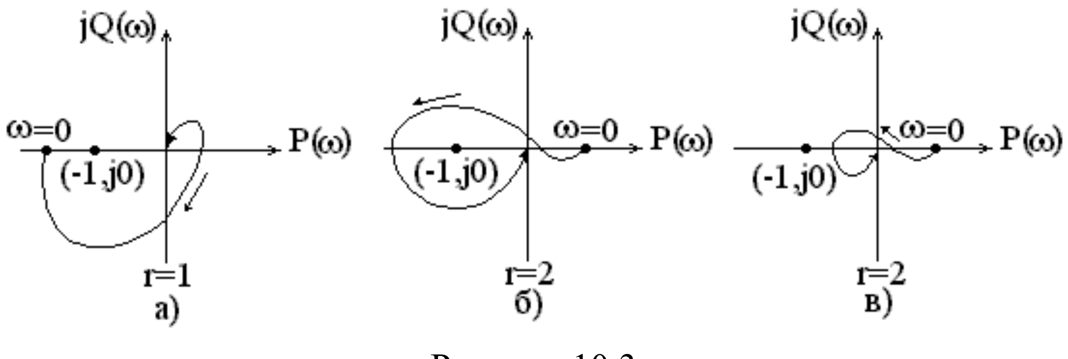

Рисунок 10.3

Годографы на рисунке 10.3 а) и 10.3 б) указывают на устойчивость замкнутой САР, на рисунке 10.3 в) – на неустойчивость.

Определение запаса устойчивости замкнутой САР по годографу АФХ разомкнутой САР.

Запас устойчивости определяют для устойчивой замкнутой САР по расположению АФХ разомкнутой системы относительно критической точки. Выделяют две численные величины: запас устойчивости по модулю «С» и запас устойчивости по фазе»γ» (рисунок 10.4). С – это расстояние от критической точки до точки пересечения АФХ с отрицательной вещественной полуосью 0<C≤1, γ - угол между отрицательной вещественной полуосью и лучом, проведенным из начала координат в точку пересечения АФХ с единичной окружностью (показана пунктиром), $\gamma = \left|\pi - \varphi_{раз}(\omega)\right|$.

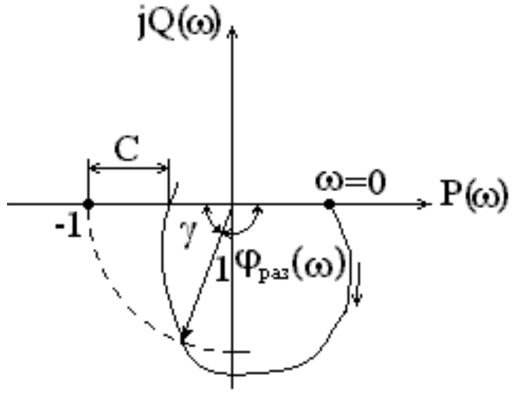

Рисунок 10.4

Порядок оценки устойчивости по критерию Найквиста:

а) по исходному дифференциальному уравнению или структурной схеме САР находим передаточную функцию разомкнутой системы (прямой цепи);

б) делаем оценку устойчивости разомкнутой системы по любому удобному алгебраическому критерию;

в) находим и строим годограф АФХ разомкнутой системы в порядке, указанном выше;

г) по расположению АФХ разомкнутой системы относительно точки (-1;j0) делаем вывод об устойчивости замкнутой САР;

д) по графику АФХ находим значение запаса устойчивости по модулю, как

$$C = 1 - P(\omega_i), \tag{10.4}$$

где $P(\omega_i)$ - значение вещественной составляющей в момент пересечения АФХ отрицательной вещественной полуоси при ω_i;

е) находим значение γ как

$$\gamma = \left|\pi - \varphi_{раз}(\omega)\right| = \left|\pi - arctg\frac{Q_{раз}(\omega)}{P_{раз}(\omega)}\right|. \tag{10.5}$$